Studies on the Summability of Fourier Series and Orthogonal Series (フーリエ級数と直交級数の総和法の研究)

著者	奥山 安男
号	703
発行年	1982
URL	http://hdl.handle.net/10097/24552

氏名・(本籍)	奥山安男（おくやまやすを）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第703号
学位授与年月日	昭和57年6月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和37年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Studies on the Summability of Fourier Series and Orthogonal Series(フーリェ級数と直交級数の総和法の研究)
論文審査委員	教授 猪狩 惺　教授 土倉 保 教授 加藤順二

論文目次

論 文 内 容 要 旨

序

発散級数の総和法理論の歴史は非常に古く，数多くすぐれた研究がある。たとえばアーベル総和法，チェザロ総和法，調和総和法，対数総和法，ボレル総和法，オイラー総和法，リーマン総和法等の研究は有名である。

G.F. Woronoi (1902), N.E. Nörlund (1919) が独立に定義したネールンド総和法はチェザロ総和法，調和総和法を包括する総和法である。また M. Riesz (1909) がディリクル級数の研究に導入したリース総和法は対数総和法を包含する総和法である。従って総和法を一般的に論ずる立場から，ネールンドおよびリースを総和法は極めて有効な総和法と言える。

総和法は収束の概念の拡張であるように，絶対総和法は絶対収束の概念の拡張である。そして絶対ネールンドおよびリース総和法で考察することは総和法理論からも興味深いと言える。

フーリエ級数の絶対収束性は関数の変分，連続性とは密接な関係があるが，これらの性質からだけでは絶対収束性は十分に記述されるとは限らない。この理由からフーリエ級数が絶対収束性を示す種々の十分条件が考えられてきた。

本研究はこれらの条件を直交級数の立場から一般的に考察し，古典的な定理が導びかれる背景を明らかにした。また絶対収束性を示さないフーリエ級数，直交級数に対しては，関数の変分，連続性，係数条件等に注目して，絶対ネールンドおよびリース総和可能である条件を考察した。これによって従来の結果は一般化され，見通しが良くなった。

本論文は3つの章からなっている。

第I章ではフーリエ級数の絶対収束に関する古典的な定理を導びく背景を直交級数で考察する。第II章では関数の変分とフーリエ級数の絶対ネールンド総和法との関係を明らかにし，体系的に論ずる。第III章では直交級数の絶対リース総和法の一般論を構成し，フーリエ級数への応用を述べる。

第I章 S.B. Stechkin (1947) は最良近似の観点から直交級数の絶対収束に関する結果を与えた。すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} E_n^{(2)}(f) < \infty \quad ならば， \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

この結果はフーリエ級数に対する S.N. Bernstein (1914) の定理の拡張である。この古典的な定理には関係する種々の結果がある。これを直交級数論の立場から眺め，一般化を計ることは興味がある。個々の直交級数に対する研究は J.R. Mclaughlin (1973) 等によってなされている。

この章の目的は Bernstein の定理およびそれに関係した結果が Stechkin の定理から導びかれる数学的背景を三角関数系，ウォルシュ関数で明らかにし，ある種の性質をもつ直交関数系に対しても同様な結果が成立することを示すことである。以下はその要約である。

$\Phi = \{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, を有限測度集合上で定義された L^1 －完備な有界正規直交系とし，$\varphi_1, \ldots,$

φ_n の一次結合の全体を Φ_n であらわす。つぎのような性質(A), (B), (C)を考える。

(A)　$1 \leqq p < q < \infty$, $P \in \Phi_n$ ならば

$$\|P\|_q \leqq A n^{\alpha} \|P\|_p, \quad \alpha = 1/p - 1/q$$

ただし A は Φ にのみ関係する定数とする。

(B)　つぎの性質をみたす線型作用素 $G_n : L^1 \to \Phi_{2n}$ が存在する：

(i)　L^p から L^p への線型作用素として，n について一様有界である。

(ii)　任意の $P \in \Phi_n$ に対して，$G_n(P) = P$.

(iii)　$1 \leqq p \leqq \infty$ ならば,

$$\|f - G_n f\|_p \leqq A\, E_n^{(p)}(f) = A \inf\{\|f - P\|_p : P \in \Phi_n\}.$$

(C)　(i)　$P = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ とする。$\alpha > 0$ に対して

$P^{[\alpha]} = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} a_k \varphi_k$ とおけば,

$$\|P^{[\alpha]}\|_p \leqq A\, n^{\alpha} \|P\|_p.$$

(ii)　$\alpha > 0$ のとき $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \in L^p$ に対して,

$$E_n^{(p)}(f^{[-\alpha]}) \leqq A\, n^{-\alpha} E_n^{(p)}(f).$$

三角関数系，ウオルシュ関数系は(A), (B), (C)をみたす。Φ が(A), (B)をみたせば，つぎの定理が成立する。

定理 1．$1 \leqq p < q < \infty$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} n^{-1/q'} E_n^{(q)}(f) \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/p'} E_n^{(p)}(f).$$

この定理によって絶対収束の判定条件を与える古典的な Zygmund, Szasz, Salem 等の定理は Stechkin の定理から導びくことが出来，見透しよく統一的にみることができる。

定理 2．$1 \leqq p < q \leqq 2$，$0 < \beta < q'$ ならば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1/q'} E_n^{(q)}(f))^{\beta} \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1/p'} E_n^{(p)}(f))^{\beta}.$$

Φ が(A), (B), (C)をみたせば，つぎの定理が成立する。

定理 3．

(i)　$0 < \beta < \alpha$, $E_n^{(1)}(f) = 0(n^{-1})$, $E_n^{(\infty)}(f) = 0(n^{-\alpha})$　ならば,　$\Sigma n^{\beta/2} |a_n| < \infty$.

(ii)　$\delta > 0$, $1 \leqq p \leqq 2$, $0 < \beta < 2$, $\Sigma (n^{\delta - 1/p} E_n^{(p)}(f))^{\beta} < \infty$　ならば, $\Sigma (n^{\delta} |a_n|)^{\beta} < \infty$.

第II章

フーリエ級数の収束状態は収束の概念を拡張した総和法で考えるとみやすくなりかつ有効な応用もある。そしてフーリエ級数および共役級数の絶対収束も，総対総和法によって概念を拡張して考えることが出来る。この場合も絶対ネールンド総和法を導入することによって従来の結果を統一して記述することが出来る。

先づ関数の連続性または変分とフーリエ級数，共役級数の絶対ネールンド総和可能性の研究は L. Mcfadden (1942)，T. Pati (1959) 以来数多くの研究者によってなされて来た。

著者の結果は総和因子を導入することによって，フーリエ級数の O.P. Varshney (1963)，泉

昌子および泉信一(1970)，M. Mudiraj(1974)の結果と共役級数の A. Kumar(1974)の結果を統一的にまとめ，更に拡張したものである。以下定理を述べるとつぎのようになる。

$[-\pi,\ \pi]$上の可積分関数 $f(t)$ のフーリエ級数と共役級数をそれぞれ

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nt-a_n\sin nt)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)$$

とする。

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\},$$

$$\psi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)-f(x-t)\},$$

$$\Delta p_n=p_n-p_{n+1},\quad \lambda(n)=\lambda_n$$

とおく。

定理1．$p_n\geqq 0$，↑，$\lambda(t)>0$ ↑，$t^2\lambda'(t)/\lambda(t)^2$↑，$t\lambda'(t)/\lambda^2(t)$↓，$\mu_n\in B$, $\lambda_n\mu_n/n$↓とする。

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\mu_k/kp_k=0(\lambda_n/P_n),\quad n=1,2,\ldots$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda'_k\mu_k/\lambda_k<\infty$$
$$\lambda(c/t)\varphi(t)\in BV(0,\ \pi)$$

ならば，点 x で $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\mu_nA_n(t)$ は$|N,\ p_n|$総和可能である。

定理2．p_n, $\Delta p_n\geqq 0$，↑，$\mu(t)\in B$, $\lambda(t)>0$ ↑，$\lambda(t)\mu(t)/t$↓，$n\mu_n$↑，μ_n/p_n↑とする。

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\mu_k/kp_k=0(\lambda_n/p_n),\quad n=1,2,\ldots,$$

$$\int_0^{\pi}\lambda(c/t)\mu(c/t)\ \psi(t)\ dt/t<\infty,$$

$$\int_0^{\pi}\lambda(c/t)\ d\psi(t)<\infty$$

ならば，点 x で $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\mu_nB_n(t)$ は$|N,\ P_m|$総和可能である。

定理3．$p_n\geqq 0$↓，$\mu_n\in B$，$\lambda(t)>0$ ↑，$\lambda_n\mu_n/(n+1)$↓とする。

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\mu_k/kp_k=0(\lambda_n/P_n),\quad n=1,2,\ldots$$
$$\psi(+0)=0$$

$$\int_0^{\pi}\lambda(c/t)|d\psi(t)|<\infty$$

ならば，点 x で $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\mu_nB_n(t)$ は$|N,\ P_n|$総和可能である。

第III章

直交級数はその係数がある種のむしろ弱い条件を満たすとき，絶対収束性を示す。F.W. Wang(1941－42)はフーリエ級数の係数条件と絶対チェザロ総和法との間に絶対収束の場合と類似関係があることを明らかにした。土倉保(1953)，K. Tandori(1960)，L. Leindler(1961)，P.L. Ul'yanov(1964)等はこの結果を直交級数に拡張した。著者はこれらの結果を絶対ネールンドおよびリース総和法で考察することによって拡張することを試みた。

すなわち，本研究は直交級数の絶対リース総和法に関するF. Mőricz(1962)の定理と同値な定理を示し，それらの応用として，直交級数の係数条件，最良近似と直交級数の絶対リース総和法との関係を明らかにした。またこれらの結果にL. Leindler(1965)の構造定理を応用することによって，フーリエ級数の絶対リース総和可能性と関数の連続性との関係が明らかになった。これは直交級数，フーリエ級数の絶対チェザロ総和法のP.L. Ul'yanov(1964)の結果と類似の結果が絶対リース総和法に対しても成立することを示しており，この方面の研究に対しては絶対ネールンド総和法より絶対リース総和法で統一的にまとめるのが自然である。本研究の結果はつぎのように述べられる。

$P(x)$を$P(n)=P_n$，$P'(n)=p_n$ $(n=0,1,\dots)$となる狭義増加関数，$\Lambda(x)$を$P(x)$の逆関数とし，$\nu_n=[\Lambda(2^n)]$とおく。

$$C_n=\{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}|a_n|^2\}^{1/2},\quad n=0,1,\dots$$

と定義する

$$L_0(t)=1,\ L_1(t)=\log t,\ L_p(t)=L_1(L_{p-1}(t))$$

$$L_p^{(\varepsilon)}(t)=L_1(t)\dots L_{p-1}(t)(L_p(t))^{1+\varepsilon}(\varepsilon\geqq 0,p=1,2,\dots)$$

とおく。

定理1．$\sum_{n=0}^{\infty}C_n<\infty$である必要十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty}p_n/P_n\,P_{n-1}\{\sum_{k=1}^{n}P_{k-1}^2|a_k|^2\}^{1/2}<\infty$ である。

定理2．pは非負整数，sは正整数，$\alpha>0$，$\varepsilon>0$とする。

(i) $\Sigma|a_n|^2L_s^{(0)}(n)^{-1}L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n)<\infty$ならば，

$\Sigma a_n\varphi_n(x)\in|R, L_s(n), 1|$ a. e.

(ii) $\Sigma|a_n|^2 nL_s(n)^{-\alpha}L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n)<\infty$ならば，

$\Sigma a_n\varphi_n(x)\in|R, \exp n/L_s(n)^{\alpha}, 1|$ a. e.

$\Omega(\delta, f)$はL^2-連続率，L^2-二階連続率又はその積分平均とする。

定理3．定理2と同じ仮定とする。

(i) $\Omega(\delta, f)=0(L_{s+1}(1/\delta)^{-1/2-\varepsilon})$ならば，

$\Sigma A_n(x)\in|R, L_s(n)^{\alpha}, 1|$ a. e.

(ii) $\Omega(\delta, f)=0(\delta^{1/2}L_s(1/\delta)^{\alpha/2}L_{p+s}^{(\varepsilon)}(1/\delta)^{-1})$ならば，

$\Sigma A_n(x)\in|R, \exp n/L_s(n)^{\alpha}, 1|$ a. e.

定理4．$P_n>0$とする。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n/P_nP_{n-1}\ \{\sum_{k=1}^{n} P_{k-1}^2\ (|a_k|^2+|b_k|^2)\}^{1/2}<\infty$

ならば，$\Sigma\pm(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$ は殆んどすべての$\pm$に対して a. e.で$|R, P_n, 1|$総和可能である。級数(1)が発散すれば，$\Sigma\pm(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$ は殆んどすべての$\pm$に対して a. e.で$|R, P_n, 1|$総和可能でない。

系．定数２，３の $L_p^{(\varepsilon)}(\cdot)$ あるいは $L_{p+s}^{(\varepsilon)}(\cdot)$ の $\varepsilon>0$を除くことができない。

論文審査の結果の要旨

本論文は，フーリエ級数と直交級数の絶対収束性および絶対総和法の研究を行ったものである。フーリエ級数の収束性は複雑であって解析学の数多くの問題と関連して研究されてきたが，絶対収束性はフーリエ変換の代数的側面，函数の評価の技術的な側面からみて，また絶対総和法は収束挙動を調べるうえで興味ある課題である。

本研究は三つの部分から成っている。

第1章，フーリエ級数が絶対収束するための条件としては，古典的なS. Bernstein(1914)の定理があり，以後その拡張，変形の試みがなされてきた。これらは，すべて函数の変分，連続性に条件を附したものである。著者は先ずこれら古典的な条件は最良近似の評価でおきかえられることに着目した。そして二つの最良近似列間のある関係式を示すことによって，従来知られていた絶対収束判定条件は，S.Stechkinの定理から導びくことができることを示した。この方法は，ある種の条件をみたす直交函数系による展開に対しても適用できるものであり，これによって絶対収束に関する定理，判定条件は統一的に整理され拡張された。

第2章は絶対収束という概念の一つの一般化である絶対総和法の研究にあてられている。著者は，総和因子をも含めた形で1点における絶対Nörlund総和定理を示した。これによってS. Mazhar，泉信一等による数多くの結果が一つの定理の形で体系化された。更に類似の定理が共役級数に対しても成りたつことを示している。

第3章は殆んどすべての点に於ける絶対総和可能性の研究である，著者はこの場合はNörlund総和法よりもRiesz総和法で総一的に記述する方が効果的であるとの観点から直交級数及びフーリエ級数が殆んどすべての点で絶対総和可能であるための十分条件も与えた。また著者はこれらの結果は最良であることも示している。

以上のように，本論文はフーリエ級数の絶対収束及び絶対総和可能性に対する，従来から知られている厖大な量の結果を拡張し統一的に見透しのよい形で記述できることを示したものである。それはまた新しい結果をももたらしており，上で述べたような分野に大いに貢献するものである。よって理学博士の学位論文として合格であると認める。